TD_{15} – Intégrales à paramètre

Exercice 1 ★★

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition D_F de F. Étudier la parité de F.
2. Montrer que F est continue sur son ensemble de définition
3. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D_F et exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
4. Déterminer une équation différentielle vérifiée par F et en déduire une expression simple de $F(x)$

Exercice 2 ★★

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{ch}(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer l'existence de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Étudier la parité de F.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (*on pourra utiliser une domination locale*), et exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
3. Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par F et en déduire une expression simple de $F(x)$ *On pourra utiliser le fait que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 3 ★★

On pose, pour tout $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. (*on pourra utiliser une domination locale*)
2. Montrer que F est monotone.
3. Déterminer les limites de F en $+\infty$ et en 0. On commencera par justifier que pour tout $t \in \left[0, \dfrac{1}{x}\right]$,
$$\mathrm{e}^{-tx} \geqslant 1 - tx \geqslant 0.$$
Donner l'allure de la courbe.

Exercice 4 ★★★

Soit la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que Γ est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que Γ est continue sur $]0, +\infty[$ (on pourra utiliser une domination locale).
3. Montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (on pourra utiliser une domination locale) sur $]0, +\infty[$ et que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^k(t)\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$
4. En déduire que la fonction Γ est convexe sur $]0, +\infty[$ (i.e. $\Gamma'' \geqslant 0$).
5. Démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$.
7. Démontrer que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Exercice 5 ★★★

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \geqslant 0$, $I_n = \displaystyle\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. En déduire que F est positive sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin ux}{1+u}\,\mathrm{d}u$. En déduire que F est impaire, de classe $\mathscr{C}^1$, et calculer sa dérivée.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

Exercice 6 ★★★

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{tx}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de F, puis montrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}_F$. Donner une expression intégrale de $F^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer I_0 et I_1, puis chercher une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
3. En déduire le développement limité à l'ordre 3 de F en 0, puis l'allure de la courbe de F en ce point.
4. Préciser le sens de variation de F sur $\mathscr{D}_F$, puis déterminer les limites aux bornes. Tracer l'allure de la courbe.

Exercice 7 ★★★

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose :

$$\widehat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $\hat{f}$ est appelée transformée de Fourier de f.

1. Démontrer que $\hat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. On considère désormais la fonction f définie par $f(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$. Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $\hat{f}'$ et en déduire la valeur de f. On admettra que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 8 ★★★

Étudier et représenter graphiquement la fonction f définie par : $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x+t^3}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 ★★★

Soit f définie pour $x > 0$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $f(x)$ est bien définie
2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^0, \mathscr{C}^1, \mathscr{C}^\infty$ (on pourra utiliser une hypothèse de domination locale) et exprimer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)$.
3. Étudier les variations de f, ses limites et tracer son graphe.
4. Montrer que f est solution d'une équation différentielle (E) linéaire du premier ordre. En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice 10 ★★

Soit f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f' + g' = 0$.
3. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 11 ★★★★

Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par

$$f(\theta) = \ln(1 - \sin(\theta)^2)$$

1. Montrer que f est intégrable sur $[0\,,\,\frac{\pi}{2}[$.
2. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + t \times \sin(\theta)^2)\,\mathrm{d}\theta$$

   (a) Montrer que F est bien définie et est continue sur $[-1\,,\,+\infty[$

   (b) Établir que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,,\,+\infty[$ et que

$$\forall t \in]-1\,,\,+\infty[\qquad F'(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\theta)^2}{1 + t \times \sin(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

3. (a) En posant le changement de variable $u = \tan(\theta)$, montrer que, pour tout $t \in]-1, +\infty[$,

$$F'(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+t} \times (1 + \sqrt{1+t})}$$

   (b) En déduire que, pour tout $t \in]-1, +\infty[$,

$$F(t) = \pi \times \left(\ln(1 + \sqrt{1+t} - \ln(2)\right)$$

Exercices issus d'oraux

Exercice 12 ★★★

(*Oral 2018*)

Pour $t \in \mathbb{R}^*$, on pose $s(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$ et pour $x \in \mathbb{R}, S(x) = \displaystyle\int_0^x s(t)\,\mathrm{d}t$.

Enfin pour $x \geqslant 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} s(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que s est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que, pour tout $x \neq 0$, $S(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x} + \displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. En déduire que f est définie sur $[0, +\infty[$.
5. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
6. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. *On pourra commencer par le faire sur* $[a, +\infty[$ *avec* $a > 0$.
7. Calculer $f(x)$.
8. En admettant la continuité de f en 0 , calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice 13 ★★★

(*Oral 2014, 2018*)

Pour $x \in]-1, +\infty[$, on définit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et déterminer le sens de variations de f.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,
$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3(1+t)} + \frac{2-t}{3\,(1-t+t^2)}$$
et en déduire la valeur de $f(0)$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f.
5. En déduire f.

Exercice 14 ★★★

(*Oral 2008*)

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Pour $f \in E$ on note $T(f)$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad T(f)(x) = \int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que l'application T ainsi définie est un endomorphisme de E
2. Déterminer les éléments propres de T.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et, pour tout $t \in [0,+\infty[$ on a $\left|\cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$.

   La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, ainsi $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Pour $t \geqslant 1$ on a $0 \leqslant \mathrm{e}{-}t^2 \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, par théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Finalement, par majoration $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument pour tout réel x. F est donc définie sur $\mathbb{R}$.

   Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $-x \in \mathbb{R}$ et
$$F(-x) = \int_0^{+\infty} \cos(-xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = F(x)$$
   F est donc paire.

2.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$
   - Pour tout $t \in [0,+\infty[$ la fonction $x \mapsto \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,+\infty[$ on a $\left|\cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}$ et la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$

   Ainsi, d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

> **Majoration**
> Attention à ce que votre majorant intégrable ne dépende pas de x

3.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$
   - Pour tout $t \in [0,+\infty[$ la fonction $x \mapsto \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est la fonction $x \mapsto -t\sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto -t\sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,+\infty[$ on a $\left|-t\sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\right| \leqslant t\mathrm{e}^{-t^2}$

     Or, pour $A > 0$ on a
$$\int_0^A t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\right]_0^A = \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-A^2}}{2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$
     Ainsi la fonction $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

   Ainsi, d'après le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) = \int_0^{+\infty} -t\sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$, On va réaliser une intégration par parties dans l'expression de $F'(x)$.

   Posons $u : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}$ et $v : t \mapsto \sin(xt)$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et on a, pour $t \geqslant 0$, $u'(t) = -t\mathrm{e}^{-t^2}$ et $v'(t) = x\cos(xt)$.

   Pour $t \geqslant 0$ on a $0 \leqslant u(t)v(t) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}$, ainsi, par encadrement $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$.

> **I.P.P.**
> Pour réaliser une intégration par parties dans une intégrale généralisée il est important de d'abord vérifier que $t \mapsto u(t)v(t)$ a des limites finies au bord de l'intervalle d'intégration.

On peut ainsi réaliser une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \int_0^{+\infty} -t\sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) - u(0)v(0) - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 - 0 - \int_0^{+\infty} x\cos(xt)\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{x}{2}F(x)
\end{aligned}$$

F est solution de l'équation différentielle $(E) : y' + \dfrac{x}{2}y = 0$.

L'ensemble des solutions de cette équation est $\left\{x \mapsto K\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}$.

Or $F(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$$

Corrigé de l'exercice 2

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \mathrm{ch}(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue. On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{|xt|}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

   Pour $u \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{ch}(u) = \dfrac{\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}}{2}$, d'où $|\mathrm{ch}(u)| \leqslant \mathrm{e}^{|u|}$.

   Ainsi, pour tout $t \in [0, +\infty[$ on a $\left|\mathrm{ch}(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\right| \leqslant \mathrm{e}^{|xt|}\mathrm{e}^{-t^2}$.

   Par croissance comparée on a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\mathrm{e}^{|xt|}\mathrm{e}^{-t^2} = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^{|xt|}\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

   Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, par théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{|xt|}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Finalement, par majoration $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument pour tout réel x et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument pour tout réel x. On en déduit que F est définie sur $\mathbb{R}$.

   Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $-x \in \mathbb{R}$ et

   $$F(-x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{ch}(-xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{ch}(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = F(x)$$

   F est donc paire.
2. Soit $K > 0$, on va montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-K, K]$
   - Pour tout $x \in [-K, K]$ la fonction $t \mapsto \mathrm{ch}(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$
   - Pour tout $t \in [0, +\infty[$ la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-K, K]$, sa dérivée est la fonction $x \mapsto t\,\mathrm{sh}(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$
   - Pour tout $x \in [-K, K]$ la fonction $t \mapsto t\,\mathrm{sh}(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$
   - Pour tout $x \in [-K, K]$ et tout $t \in [0, +\infty[$ on a

   $$\left|t\,\mathrm{sh}(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\right| \leqslant t\mathrm{e}^{|xt|}\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant t\mathrm{e}^{Kt}\mathrm{e}^{-t^2}$$

Localisation

L'énoncé nous suggère d'utiliser une domination locale. En effet on peut prouver qu'il n'existe pas de fonction φ intégrable sur $[0, +\infty[$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \geqslant 0$, $|\mathrm{ch}(xt)\mathrm{e}^{-t^2}| \leqslant \varphi(t)$

La fonction $t \mapsto t\mathrm{e}^{Kt}\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et, par croissance comparée on a $t\mathrm{e}^{Kt}\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Ainsi par théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives elle est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Ainsi, d'après le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-K,K]$.

Puisque F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tous les intervalles de la forme $[-K,K]$ avec $K>0$, elle est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\displaystyle\bigcup_{K>0}[-K,K]=\mathbb{R}$.

Continuité

Le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale nous assure que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc en particulier continue, il n'est alors pas nécessaire de montrer séparement que F est continue.

3. Soit $x\in\mathbb{R}$, On va réaliser une intégration par parties dans l'expression de $F'(x)$.

Posons $u : t \mapsto \dfrac{-\mathrm{e}^{-t^2}}{2}$ et $v : t \mapsto \mathrm{sh}(xt)$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et on a, pour $t\geqslant 0$, $u'(t)=t\mathrm{e}^{-t^2}$ et $v'(t)=x\,\mathrm{ch}(xt)$.

Pour $t\geqslant 0$ on a $0\leqslant u(t)v(t)\leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{|x|t-t^2}}{2}$, ainsi, par encadrement $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}u(t)v(t)=0$.

On peut ainsi réaliser une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \int_0^{+\infty} t\,\mathrm{sh}(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \lim_{t\to+\infty}u(t)v(t)-u(0)v(0)-\int_0^{+\infty}u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t\\
&= 0-0+\int_0^{+\infty}x\,\mathrm{ch}(xt)\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{x}{2}F(x)
\end{aligned}$$

F est solution de l'équation différentielle $(E) : y'-\dfrac{x}{2}y=0$.

L'ensemble des solutions de cette équation est $\left\{x\mapsto K\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}\ ,\ K\in\mathbb{R}\right\}$.

Or $F(0)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, ainsi

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad F(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}$$

Corrigé de l'exercice 3

1. Pour $t\in[0,+\infty[$ on a $2t\leqslant 1+t^2$, ainsi, pour $x>0$ et $\geqslant 0$ on a $\left|\dfrac{t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\right|\leqslant \mathrm{e}^{-tx}$.

On sait que, si $x>0$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$ converge (et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}$).

Ainsi, par théorème de comparaison pour les intégrales de fonction positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument pour tout $x>0$.

Soit $\varepsilon>0$, on a va montrer que F est continue sur $[\varepsilon,+\infty[$.

- Pour tout $x\geqslant\varepsilon$, la fonction $t\mapsto\dfrac{t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$
- Pour tout $t\in[0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto\dfrac{t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}$ est continue sur $[\varepsilon,+\infty[$
- Pour tout $t\geqslant 0$ et tout $x\in[\varepsilon,+\infty[$ on a $\left|\dfrac{t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\right|\leqslant\mathrm{e}^{-\varepsilon t}$ et la fonction $t\mapsto\mathrm{e}^{-\varepsilon t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$?

Ainsi, d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, F est continue sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Puisque F est continue sur tous les intervalles de la forme $[\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$, elle est alors continue sur $\bigcup_{\varepsilon>0}[\varepsilon, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$.

2. Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$ avec $a \leqslant b$.

Pour tout $t \in [0, +\infty[$ on a $\mathrm{e}^{-at} \geqslant \mathrm{e}^{-bt}$ et donc

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \frac{t\mathrm{e}^{-at}}{1+t^2} \geqslant \frac{t\mathrm{e}^{-bt}}{1+t^2}$$

D'où, par croissance de l'intégration, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-bt}}{1+t^2}$, i.e. $F(a) \geqslant F(b)$.

F est donc décroissante.

3. On a vu que, pour $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant \dfrac{t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-tx}$.

Ainsi, en intégrant, on a, pour $x > 0$, $0 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Par encadrement on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

On sait de plus que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^u \geqslant 1 + u$, ainsi, pour tout $x > 0$ et tout $t \in \left[0, \dfrac{1}{x}\right]$, $\mathrm{e}^{-tx} \geqslant 1 - tx \geqslant 0$.

On a alors

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&\geqslant \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{t(1-tx)}{1+t^2}\ \ dt \\
&\geqslant \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{t-t^2x}{1+t^2}\ \ dt \\
&\geqslant \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{t}{1+t^2} - xt^2 + 1 - 11 + t^2\ \ dt \\
&\geqslant \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{t}{1+t^2} - x + x1 + t^2\ \ dt \\
&\geqslant \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2) - tx + x\arctan(t)\right]_0^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - 1 + x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \ln(x) - 1 + x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - ln(x) - 1 + x\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$, ainsi $\lim\limits_{x\to0^+} F(x) = +\infty$.

Corrigé de l'exercice 4

1. Posons $f(x, t) = e^{-t}t^{x-1}$.

Pour $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $]0, +\infty[$, donc est intégrable sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, elle est de plus positive sur $]0, +\infty[$

En 0^+, on a $f(x, t) \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1}$. Or $x-1 > -1$, ainsi l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge et ainsi, par critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions positives, $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

En $+\infty$, on a $t^2 f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge et que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positive, le théorème de comparaison par négligeabilité nous assure que $\int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ converge.

Finalement, pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, Γ est donc bien définie sur $]0,+\infty[$.

2. - On a vu que, pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - Pour tout $t > 0$ la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
   - soit α, β deux nombres réels tels que $0 < \alpha < \beta$.

     On définit ψ par $\psi(t) = t^{\alpha-1}$ si $0 < t < 1$, $\psi(1) = 1$ et $\psi(t) = t^{\beta-1}$ si $t > 1$.

     Alors
     $$\forall t > 0, \quad \forall x \in [\alpha,\beta], \qquad 0 \leqslant t^{x-1} \leqslant \varphi(t)$$

     De manière analogue à la question 1. on prouve que la fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\varphi(t)$ est positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

   D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, on en déduit que Γ est continue sur tout intervalle $[\alpha,\beta]$, avec $0 < \alpha < \beta$. Ainsi Γ est continue sur $]0,+\infty[$.

3. On va procéder par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathcal{P}_n$ « Γ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0,+\infty[$ et $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^n(t)e^{-t}t^{x-1}dt$. ».

   <u>Initialisation :</u>

   La question 2. nous assure que $\mathcal{P}_0$ vraie.

   <u>Hérédité :</u>

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}_n$ vraie.

   Soit $0 < a < \alpha < \beta < b$ et $x \in [\alpha,\beta]$.

   Notons $g(x,t) = \ln^n(t)e^{-t}t^{x-1}$

   — Pour tout $x \in [\alpha,\beta]$, la fonction $t \mapsto \ln^n(t)e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

   — Pour tout $x \in [\alpha,\beta]$, on a, par croissance comparée $\lim\limits_{t\to0} \ln^n(t)e^{-t}t^{x-a} = 0$, d'où $\ln^n(t)e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to0}{=} o\left(t^{a-1}\right)$. Or $t \mapsto t^{a-1}$ est intégrable sur $]0,1]$

   De plus, toujours par croissance comparée, $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln^n(t)t^{x-b} = 0$, ainsi $\ln^n(t)e^{-t}t^{x-1} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(t^{b-1}e^{-t}\right)$ et $t \mapsto t^{b-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

   On en déduit que, pour tout $x \in [\alpha,\beta]$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   — Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto \ln^n(t)e^{-t}t^{x-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \ln^{n+1}(t)e^{-t}t^{x-1}$

   — Pour tout $x \in [\alpha,\beta], t \mapsto \ln^{n+1}(t)e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

   — On définit φ par
   $$\varphi(t) = \begin{cases} \left|\ln^{n+1}(t)t^{\alpha-1}\right| & \text{si } 0 < t < 1 \\ \varphi(1) = 1 & \\ \varphi(t) = t^{\beta-1}\ln^{n+1}(t) & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

   φ est continue sur $]0,+\infty[$ et le même raisonnement que pour $g(x,t)$ prouve que φ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   De plus,
   $$\forall t \in [\alpha,\beta], \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

   Ainsi, d'après le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale, la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} \ln^n(t)e^{-t}t^{x-1}\ dt$.

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, ce pour tout $(\alpha, \beta) \in]0, +\infty[$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est $x \mapsto \int_0^{+\infty} \ln^{n+1}(t) e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$.

Or, par hypothèse de récurrence, Γ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^n(t) e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t.$$

On a ainsi montré que $\Gamma^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad \left(\Gamma^{(n)}\right)'(x) = \int_0^{+\infty} \ln^{n+1}(t) e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t.$$

C'est-à-dire que Γ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad \Gamma^{(n+1)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^{n+1}(t) e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t.$$

$\mathcal{P}_{n+1}$ est bien vraie ce qui achève la récurrence.

4. Soit $x > 0$, on a $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} \ln^2(t) e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$.

   La fonction intégrée est positive sur $]0, +\infty[$, donc $\Gamma''(x) \geqslant 0$. Γ est bien convexe.
5. On effectue, dans l'expression de $\Gamma(x+1)$ l'intégration par parties $u(t) = t^x$ et $v(t) = -e^{-t}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, de plus on a $\lim\limits_{t \to 0} u(t)v(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t)v(t) = 0$ Ainsi, comme toutes les intégrales convergent, on obtient

$$\Gamma(x+1) = -\int_0^{+\infty} (-e^{-t}) x t^{x-1} \;\; dt = x\Gamma(x)$$

6. On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation :

   On a $\Gamma(0+1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t = 1 = 0!$.

   Hérédité :

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\Gamma(n+1) = n!$, alors

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n) = (n+1) \times n! = (n+1)!$$

   Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.
7. On a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} \, \mathrm{d}t$.

   Soit $\varphi : t \mapsto \sqrt{t}$. φ est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective, strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$, c'est donc un changement de variable licite.

   On a alors,

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\varphi(t)^2} 2\varphi'(t) \, \mathrm{d}t \\
&= 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \, \mathrm{d}u \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 5

1. Si $x=0$ l'intégrale va de 0 à 0 donc est nulle.

   Si $x>0$, alors pour tout $t\in[0,x]$, $t+x\geqslant x>0$. Si $x<0$, alors pour tout $t\in[x,0]$, $t+x\leqslant x<0$. Dans les deux cas, la fonction intégrée est donc bien définie et continue sur le segment adéquat. F est donc définie sur $\mathbb{R}$.

2. — Soit $n\in\mathbb{N}$ et $x\geqslant 0$. On a

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}\frac{\sin(t)}{t+x}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi}\frac{\sin(t)}{t+x}\,\mathrm{d}t+\int_{2n\pi+\pi}^{2n\pi+2\pi}\frac{\sin(t)}{t+x}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{\pi}\frac{\sin(u)}{u+2n\pi+x}\,\mathrm{d}u+\int_0^{\pi}\frac{-\sin(u)}{u+2n\pi+\pi+x}\,\mathrm{d}u\\
&= \int_0^{\pi}\sin(u)\left(\frac{1}{u+2n\pi+x}-\frac{1}{u+2n\pi+\pi+x}\right)\mathrm{d}u\\
&= \int_0^{\pi}\frac{\pi\sin(u)}{(u+2n\pi+x)(u+2n\pi+\pi+x)}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

changement de variable $u=t-2n\pi$ dans la première intégrale et $u=t-2n\pi-\pi$ dans la deuxième

   Puisque la fonction intégrée est positive sur $[0,\pi]$ on a bien $I_n\geqslant 0$.

   — Soit n l'unique entier tel que $2n\pi\leqslant x<2(n+1)\pi$ i.e. $n=\left\lfloor\frac{x}{2\pi}\right\rfloor$. On a donc, d'après la relation de Chasles

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n-1}I_k\ +\int_{2n\pi}^{x}\frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t$$

   Si $x\in[2n\pi,2n\pi+\pi]$, comme $t\longmapsto\frac{\sin t}{t+x}$ est positive sur $[2n\pi,2n\pi+\pi]$, on a $\int_{2n\pi}^{x}\frac{\sin t}{t+x}dt\geqslant 0$.

   Si $x\in]2n\pi+\pi,2n\pi+2\pi[$, alors

$$\int_{2n\pi}^{x}\frac{\sin t}{t+x}=\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi}\frac{\sin t}{t+x}+\int_{2n\pi+\pi}^{x}\frac{\sin t}{t+x}$$

   comme $t\longmapsto\frac{\sin t}{t+x}$ est négative sur $[2n\pi+\pi,2n\pi+2\pi]$, on a

$$\int_{2n\pi+\pi}^{x}\frac{\sin t}{t+x}\geqslant\int_{2n\pi+\pi}^{2n\pi+2\pi}\frac{\sin t}{t+x}$$

   D'où $\int_{2n\pi}^{x}\frac{\sin t}{t+x}\geqslant I_n\geqslant 0$

   Dans tous les cas, $F(x)$ est positif comme somme de termes positifs.

Intuition

Le résultat à démontrer se "voit" sur un dessin : le graphe de la fonction $t\longmapsto\frac{\sin t}{t+x}$ a l'allure de celui de sin, pondéré par un poids $(\frac{1}{t+x})$ de plus en plus petit quand t augmente.

3. — Pour $x=0$ on a bien $F(0)=0=\int_0^1\frac{\sin 0}{1+u}\,\mathrm{d}u$

   Pour $x\neq 0$ le changement de variable $t=ux$ donne directement le résultat voulu

   — Soit $x\in\mathbb{R}$, on a

$$F(-x)=\int_0^1\frac{\sin(-ux)}{1+u}\,\mathrm{d}u=-\int_0^1\frac{\sin ux}{1+u}\,\mathrm{d}u=-F(x)$$

   F est donc impaire.

   — Posons, pour $x\in\mathbb{R}$ et $u\in[0,1]$, $f(x,u)=\dfrac{\sin(ux)}{1+u}$.

   La fonction $u\mapsto f(x,u)$ est intégrable sur $[0,1]$ en tant que fonction continue sur un segment.

   La fonction $x\mapsto f(x,u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall(x,u)\in\mathbb{R}\times[0,1],\qquad\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)=\frac{u\cos(ux)}{1+u}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{u\cos(ux)}{1+u}$ est continue sur $[0,1]$

Enfin

$$\forall (x,u) \in \mathbb{R}\times[0,1], \qquad \left|\frac{u\cos(ux)}{1+u}\right| \leqslant \frac{u}{1+u}$$

et la fonction $u \mapsto \dfrac{u}{1+u}$ est intégrable sur $[0,1]$ en tant que fonction continue sur le segment $[0,1]$.

D'après le théorème de classe $\mathcal{C}^1$ pour les intégrales à paramètres la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x,u)\,\mathrm{d}u$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{u\cos(ux)}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

Cas particulier

On verra en fait plus tard que, lorsque l'intervalle d'intégration est un segment et que la fonction $(x,t) \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que fonction de deux variables alors toutes les hypothèses du théorème de dérivabilité sous l'intégrale sont vérifiées.

4. Soit $x > 0$, on a, par intégration par parties

$$F(x) = \left[\frac{-1}{x}\frac{\cos(ux)}{1+u}\right]_0^1 - \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\cos(ux)}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\cos(x)}{2x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x}I_{u,x}$$

où $I_{u,x} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(ux)}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u$

On a alors

$$\begin{aligned}
|F(x)| &= \left|\frac{\cos(x)}{2x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x}I_{u,x}\right| \\
&\leqslant \left|\frac{\cos(x)}{2x}\right| + \left|\frac{1}{x}\right| + \left|\frac{1}{x}I_{u,x}\right| \\
&\leqslant \frac{3}{2x} + \frac{1}{x}\int_0^1 \left|\frac{\cos(ux)}{(1+u)^2}\right|\mathrm{d}u \\
&\leqslant \frac{3}{2x} + \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2x} + \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{1}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u = 0$ alors, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

Corrigé de l'exercice 6

1. — Posons $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times[0,1] & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \mathrm{e}^{tx}\sqrt{1-t^2} \end{array}$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue donc l'intégrale définissant $F(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ (en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment), on a donc $\mathscr{D}_F = \mathbb{R}$.

   — On va procéder par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathcal{P}_n$ « F est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $F^{(n)}(x) = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{xt}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ ».

   Initialisation :

   La question 1. nous assure que $\mathcal{P}_0$ vraie.

   Hérédité :

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}_n$ vraie.

   Soit $a > 0$ et $x \in [-a,a]$.

   Notons $g : (x,t) \mapsto t^n\mathrm{e}^{xt}\sqrt{1-t^2}$

   — Pour tout $x \in [-a,a]$, la fonction $t \mapsto t^n\mathrm{e}^{xt}\sqrt{1-t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

— Pour tout $x \in [-a, a]$ la fonction $t \mapsto t^n \mathrm{e}^{xt}\sqrt{1-t^2}$ est intégrable sur $[0, 1]$ en tant que fonction continue sur un segment.
— Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto t^n e^{xt}\sqrt{1-t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t) = t^{n+1}\mathrm{e}^{xt}\sqrt{1-t^2}$
— Pour tout $x \in [-a, a]$, la fonction $t \mapsto t^{n+1}\mathrm{e}^{xt}\sqrt{1-t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
— On a la majoration suivante

$$\forall t \in [-a, a], \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant t^{n+1}e^{at}\sqrt{1-t^2}$$

La fonction $t \mapsto t^{n+1}e^{at}\sqrt{1-t^2}$ est intégrale sur $[0, 1]$ en tant que fonction continue sur un segment

Ainsi, d'après le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{at}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$. est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$, ce pour tout $a > 0$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{xt}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence

Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a $F^{(n)}(x) = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{xt}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. — On a $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$. La changement de variable $t = \sin(t)$ nous donne

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos^2(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\frac{1+\cos(2t)}{2}|\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

— On a

$$I_0 = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^1 t^{n+2}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

Posons $u : t \mapsto \dfrac{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}]}{3}$ et $v : t \mapsto t^{n+1}$, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et on a alors

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^1 t^{n+2}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u(v)v'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 - 0 + \frac{n+1}{3}\int_0^1 t^n(1-t^2)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n+1}{3}I_n - \frac{n+1}{3}I_{n2}
\end{aligned}$$

On en déduit que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+4}I_n$

3. On remarque que $I_n = F^{(n)}(0)$,

Comme F est de classe $\mathcal{C}^3$, la formule de Taylor-Young nous donne l'existence d'un développement limité à l'ordre 3 en 0

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2}x^2 + \frac{F^{(3)}(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

D'où

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{x}{3} + \frac{\pi x^2}{16} + \frac{x^3}{45} + o(x^3)$$

La courbe de F admet donc comme tangente la droite d'équation $y = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{3}$ au point d'abscisse 0. De plus comme $F(x) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{3}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi x^2}{16}$, la courbe est au-dessus de la tangente au voisinage de 0.

4. — On a vu précédemment que, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F'(x) = \int_0^1 t\mathrm{e}^{xt}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

Ainsi F est croissante sur $\mathbb{R}$.

— Pour $x \neq 0$ on a

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{e^x - 1}{x}$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{x} = 0$, d'où, par encadrement, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

— Pour tout $x > 0$ on a $\mathrm{e}^{tx} \geqslant 1 + tx$, d'où, par intégration

$$F(x) \geqslant \int_0^1 (1+tx)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\pi}{4} + \frac{x}{3}$$

D'où, par minoration $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Corrigé de l'exercice 7

1. Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ on a $|f(t)\mathrm{e}^{-ixt}| = |f(t)|$.

Or f est intégrable sur $\mathbb{R}$, i.e. $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-ixt}$ est intégrable. $\hat{f}$ est ainsi bien définie.

De plus on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$|\hat{f}(x)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-ixt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t)\mathrm{e}^{-ixt}\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Ainsi $\hat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-ixt}$ est continue
— Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-ixt}$ est continue
— Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ on a $|f(t)\mathrm{e}^{-ixt}| \leqslant |f(t)|$ et $t \mapsto |f(t)|$ est intégrable

D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, $\hat{f}$ est alors continue sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose, $\mathcal{P}_n$ « $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^n e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ ».

<u>Initialisation :</u>

Pour $n = 0$, f est continue sur $\mathbb{R}$ et $t^2 f(t) \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f(t) \underset{t\to\pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Ainsi f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et d'après 1., $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Hérédité :</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}_n$ vraie.

On pose $g(x,t) = (-it)^n e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, par croissances comparées, $t^2|g(x,t)| \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

— Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\frac{\partial g}{\partial x} = (-it)^{n+1} e^{-itx} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$

— On a l'inégalité suivante

$$\forall x,t \in \mathbb{R}, \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t^{n+1}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

La fonction $\varphi : t \mapsto t^{n+1}e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème de dérivation sous le signe intégrale nous assure alors que $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^n e^{-itx}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Or d'après l'hypothèse de récurrence, cette fonction est la dérivée n-ième de $\hat{f}$, donc $\hat{f}^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \hat{f}^{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^{n+1}e^{-itx}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

$\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie ce qui achève la récurrence.

Ainsi $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \hat{f}'(x) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}te^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

On effectue l'intégration par parties $u(t) = ie^{-itx}$, $v(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}}$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On a $\lim\limits_{t\to\pm\infty} u(t)v(t) = 0$ et on a déjà prouvé que les intégrales impropres manipulées étaient convergentes.

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \hat{f}'(x) = -x\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = -x\hat{f}(x)$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \hat{f}(x) = \hat{f}(0)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\hat{f}(0) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ par parité de la fonction intégrée. Le changement de variable affine $t = \sqrt{2}u$, de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissant, réalisant une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur lui-même donne

$$\hat{f}(0) = 2\sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \sqrt{2\pi}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \hat{f}(x) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Corrigé de l'exercice 8

f n'est as définie pour $x < 0$. pour $x \geqslant 0$, $t \mapsto \sqrt{x+t^3}$ est continue sur le segment $[0,1]$. L'ensemble de définition de f est donc $\mathbb{R}_+$

La fonction $g : (x,t) \mapsto \sqrt{x+t^3}$ est continue (en tant que fonction de deux variables) sur $\mathbb{R}^+ \times [0,1]$, donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ avec $x < y$. Soit $t \in [0,1]$, par croissance de la fonction racine carrée, on a $\sqrt{x+t^3} \leqslant \sqrt{y+t^3}$, d'où par croissance de l'intégrale, $f(x) \leqslant f(y)$. f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$.

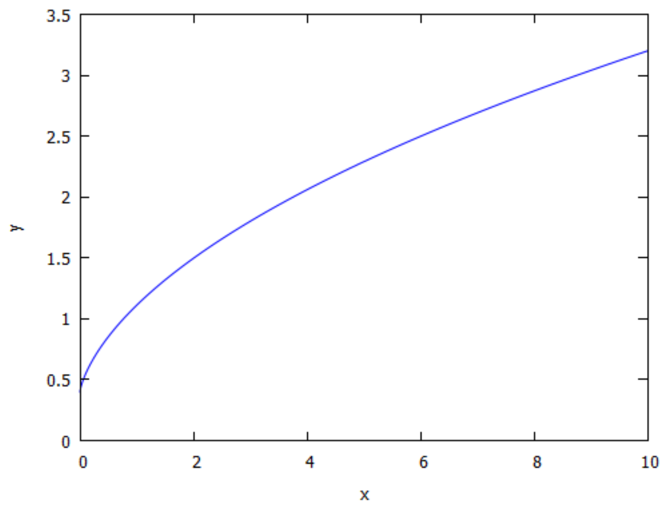
De plus, pour $x \geqslant 0$ et $t \in [0,1]$ on a $\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x+t^3} \leqslant \sqrt{x+1}$. Ainsi par intégration

$$\forall x \geqslant 0, \qquad \sqrt{x} \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x+1}$$

D'où $f(x) \underset{x+\infty}{\sim} \sqrt{x}$.

Finalement le tracé de la courbe de f est

Figure .1 – Tracé de la courbe de f



Corrigé de l'exercice 9

1. Soit $x > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et on a
$$\forall t \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \frac{e^{-t}}{x+t} \leqslant \frac{e^{-t}}{x}$$
Or la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$
Ainsi, par majoration $f(x)$ est bien définie.

2. Posons $g : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$.
   — Pour $x > 0$ la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$
   — Pour $t \geqslant 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
   Sa dérivée n-ième est la fonction $x \mapsto \dfrac{(-1)^n n! e^{-t}}{(x+t)^{n+1}}$, qui est continue sur $]0, +\infty[$
   — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x > 0$ les fonctions $t \mapsto \dfrac{(-1)^n n! e^{-t}}{(x+t)^{n+1}}$ sont continues sur $[0, +\infty[$
   — Hypothèse de domination :
   Soit $a > 0$ alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $x > a$, et $t \geqslant 0$ on a
$$\left| \frac{(-1)^n n! e^{-t}}{(x+t)^{n+1}} \right| \leqslant \frac{n! e^{-t}}{a^{n+1}}$$
   Notons $\varphi_n : t \mapsto \dfrac{n! e^{-t}}{a^{n+1}}$. φ_n est continue, positive sur $[0, +\infty[$ et son intégrale impropre sur $[0, +\infty[$ est convergente.
   De plus pour $n \in \mathbb{N}$, $x > a$, et $t \geqslant 0$ on a
$$\left| \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t) \right| \leqslant \varphi_n(t)$$
   L'hypothèse de domination est vérifiée à tout rang n, sur tout segment $[a, +\infty[$.
   Ainsi, par récurrence, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout $[a, +\infty[$, donc sur $]0, +\infty[$.

   De plus, pour $x > 0$ on a
$$f^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n n! \mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^{n+1}} \, \mathrm{d}t$$

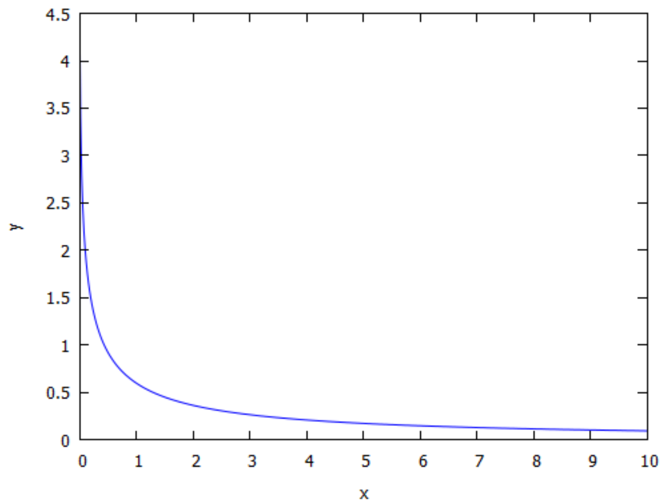
3. Pour $x > 0$ on a $f'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$. Par positivité de l'intégrale impropre, f' est négative sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f y est décroissante.

   De plus on a
$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}$$
   D'où, par encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

   On a également
$$f(x) \geqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\ln(1+x)-\ln(x)}{\mathrm{e}}$$
   Or $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(1+x)-\ln(x)}{\mathrm{e}} = +\infty$, donc par encadrement, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

   On obtient le tracé suivant

   Figure .2 – Tracé de la courbe de f



4. Soit $x > 0$. On fait une intégration par parties dans f' en posant $u(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $v(t) = -\dfrac{1}{x+t}$.

   u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$

   On a alors
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) - u(0)v(0) - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0 - \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{x} + f(x)
\end{aligned}$$
   Ainsi f est solution de l'équation$(E) : y' - y = -\dfrac{1}{x}$

   f est une solutions particulière de (E). L'équation homogène associée est linéaire du premier ordre à coefficients constants.

   On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + ke^x$, où $k \in \mathbb{R}$.

Corrigé de l'exercice 10

1. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la primitive de cette fonction qui s'annule en 0 est ainsi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et f, qui est le carré de cette fonction, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

   — Pour $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $[0,1]$

   — Pour $t \in [0,1]$ la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de dérivée $x \mapsto -2xe^{-x^2(1+t^2)}$

   — Pour $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ est continue sur $[0,1]$

   — Soit $a > 0$, pour $x \in [-a,a]$ et $t \in [0,1]$ on a

$$\left|-2xe^{-x^2(1+t^2)}\right| \leqslant a$$

   La fonction $t \mapsto a$ est intégrable sur $[0,1]$

   D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $[-a,a]$ avec $a > 0$ donc sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = -2x\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = -2e^{-x^2}\int_0^1 xe^{-(xt)^2}\mathrm{d}t$$

2. En posant le changement de variable $\psi(t) = xt$, on obtient, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2e^{-x^2}\int_0^1 x\mathrm{e}^{-(xt)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -2e^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-(\psi(t))^2}\psi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -2e^{-x^2}\int_{\psi(0)}^{\psi(1)} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= -2e^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

   Ainsi $f' + g' = 0$.

3. $f + g$ est une fonction dérivable de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, c'est donc une fonction constante. Or $f(0) = 0$ et

$$g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

   D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$$

   Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2t^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{\pi}{4}e^{-x^2}$$

   On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}$

   Ainsi $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Corrigé de l'exercice 11

1. Pour tout $\alpha > 0$ la fonction f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2} - \alpha]$. Le seul problème va venir du comportement au voisinage de $\frac{\pi}{2}$. Posons $u = \frac{\pi}{2} - \theta$. Alors $\ln(1-\sin(\theta)^2) = \ln(1-\cos(u)^2) = 2\ln(\sin(u))$.

   Au voisinage de 0, on a $\sin(u) \underset{u\to 0}{=} u + o(u)$. D'où $2\ln(\sin(u)) \sim 2\ln(u)$.

   Or la fonction $u \mapsto \ln(u)$ est intégrable au voisinage de 0. Ainsi la fonction $\theta \mapsto \ln(1-\sin(\theta)^2$ est intégrable au voisinage de $\frac{\pi}{2}$.

2. (a) Pour montrer que F est bien définie et continue on va utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale,

   On pose pour cela $g(\theta, t) = \ln(1 + t \times \sin(\theta)^2)$. Toutefois il ne va pas être possible de trouver une domination sur $[-1, +\infty[$. On va montrer que, $\forall a > 0$, f est bien définie et continue sur l'intervalle $[-1, a]$, ce qui montrera que f est bien définie et continue sur $[-1, +\infty[$. Soit $a > 0$.

   — Pour $t \in [-1, a]$ fixé, la fonction $\theta \mapsto g(\theta, t)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

   — Pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la fonction $t \mapsto g(\theta, t)$ est continue sur $[-1, a]$.

   — On a l'encadrement suivant :
   $$\forall t \in [-1, a]\ ,\ \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2} \qquad \ln(1 - \sin(\theta)^2) \leqslant g(\theta, t) \leqslant \ln(1 + a\sin(\theta)^2)$$
   On a vu à la question précédente que la fonction $\theta \mapsto -\ln(1-\sin(\theta)^2)$ est intégrable et on sait que la fonction $\theta \mapsto \ln(1 + a\sin(\theta)^2)$ est intégrable car elle est bornée sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On peut alors prendre la majoration
   $$\forall t \in [-1, a]\ ,\ \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[\qquad |g(\theta, t)| \leqslant |\ln(1 + a\sin(\theta)^2)| + |\ln(1 - \sin(\theta)^2)|$$

   On applique alors le théorème de continuité sous le signe intégrale. La fonction F est donc bien définie et continue sur $[-1, a[$. Comme F est bien définie et continue sur tous les intervalles $[-1, a[$ pour $a > 0$, il s'ensuit que F est bien définie et continue sur $[-1, +\infty[$.

   (b) Pour montrer que F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ on veut utiliser le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale vu en cours

   Toutefois il ne va pas être possible de trouver une domination sur $]-1, +\infty[$. On va montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, F est dérivable sur l'intervalle $[-1+\varepsilon, +\infty[$, ce qui montrera que F est dérivable sur $]-1, +\infty[$. Soit $\varepsilon > 0$.

   — Pour $t \in]-1, +\infty[$ fixé, la fonction $\theta \mapsto g(\theta, t)$ est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   — Pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, l'application $t \mapsto g(t, \theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1+\varepsilon, +\infty[$. Sa dérivée vaut
   $$\frac{\partial g}{\partial t}(t, \theta) = \frac{\sin(\theta)^2}{1 + t\sin(\theta)^2}$$

   — On a la domination suivante :
   $$\forall t \in [-1+\varepsilon, +\infty[\ ,\ \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \qquad \left|\frac{\sin(\theta)^2}{1 + t\sin(\theta)^2}\right| \leqslant \frac{\sin(\theta)^2}{1 + (-1+\varepsilon) \times \sin(\theta)^2}$$
   Et la fonction $\theta \mapsto \dfrac{\sin(\theta)^2}{1 + (-1+\varepsilon) \times \sin(\theta)^2}$ est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   On applique alors le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale. La fonction F est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1+\varepsilon, +\infty[$, de dérivée
   $$F'(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\theta)^2}{1 + t \times \sin(\theta)^2}\, \mathrm{d}\theta$$

   Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tous les intervalles $[-1+\varepsilon, +\infty[$ pour $\varepsilon > 0$, il s'ensuit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$.

3. (a) Comme suggeré on va poser le changement de variable $u = \tan(\theta)$. On obtient alors, pour $t > -1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\theta)^2}{1 + t \times \sin(\theta)^2} \, \mathrm{d}\theta &= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{u^2}{1+u^2}}{1 + t \times \frac{u^2}{1+u^2}} \times \frac{1}{1+u^2} \, \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{(u^2+1) \times (1 + u^2 + t \times u^2)} \, \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \times \frac{1}{1+u^2} \, \mathrm{d}u - \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \times \frac{1}{1 + (1+t) \times u^2} \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{\pi}{2t} - \frac{1}{t} \times \frac{1}{\sqrt{1+t}} \times \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2} \, \mathrm{d}v \\
&= \frac{\pi}{2t} - \frac{\pi}{2t \times \sqrt{1+t}} \\
&= \frac{\pi}{2} \times \frac{\sqrt{1+t} - 1}{t\sqrt{1+t}} \\
&= \frac{\pi}{2} \times \frac{(\sqrt{1+t} - 1) \times (\sqrt{1+t} + 1)}{t\sqrt{1+t} \times (\sqrt{1+t} + 1)} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{1+t} \times (1 + \sqrt{1+t})}
\end{aligned}$$

On fait le changement de variable $v = \sqrt{1+t} \times u$

On obtient bien :

$$\forall t \in]-1, +\infty[\quad F'(t) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+t} \times (1 + \sqrt{1+t})}$$

(b) Posons, pour $t \in [-1, +\infty[$, $G(t) = \pi \times \left(\ln(1 + \sqrt{1+t} - \ln(2)\right)$. Alors, G est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et,

$$\forall t \in]-1, +\infty[\quad G'(t) = \frac{\pi \times \frac{1}{2\sqrt{1+t}}}{1 + \sqrt{1+t}} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+t} \times (1 + \sqrt{1+t})} = F'(t)$$

Ainsi, $(F - G)'$ est nulle sur l'intervalle $]-1, +\infty[$. L'application $t \mapsto F(t) - G(t)$ est constante et vaut en particulier $F(0) - G(0)$

On remarque que $F(0) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+0) \, \mathrm{d}\theta = 0$ et $G(0) = \pi \times \left(\ln(1 + \sqrt{1+0} - \ln(2)\right) = 0$.
On a donc obtenu que :

$$\forall t \in]-1, +\infty[\quad F(t) = \pi \times \left(\ln(1 + \sqrt{1+t} - \ln(2)\right)$$

Corrigé de l'exercice 12

1. On a $s(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{t}{t}$, ainsi s est prolongeable par continuité en 0.

   Pour $t \neq 0$ on a

$$s'(t) = \frac{t\cos(t) - \sin(t)}{t^2} \underset{t \to 0}{=} \frac{t - \frac{t^3}{2} - t + \frac{t^2}{6} o(t^3)}{t^2} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

   Ainsi, d'après le théorème de la limite de la dérivée s se prolonge en une fonction de classe $\rfloor^1$ sur $\mathbb{R}$.

   De plus, pour $t \in \mathbb{R}$ on a $\left|\dfrac{\sin(t)}{t}\right| \leqslant \left|\dfrac{t}{t}\right| \leqslant 1$.

2. S est une primitive de s qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, S est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $x \neq 0$, on pose $u : t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $v : t \mapsto -\dfrac{1}{t}$, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et on a

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1-\cos(x)}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

4. La question précédente nous assure que $\lim_{x\to+\infty} S(x) = I$, ainsi $\int_0^{+\infty} s(t)\,\mathrm{d}t$ converge, i.e. $f(0)$ est bien définie.

   Soit $x > 0$

   On a, pour $t \geqslant 0$ $|s(t)\mathrm{e}^{-xt}| \leqslant e^{-xt}$, or la fonction $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrale sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi, par majoration la fonction $t \mapsto s(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ ce qui nous assure de l'existence de $f(x)$.

Majoration

Il est tentant d'écrire $|s(t)\mathrm{e}^{-xt}| \leqslant |s(t)|$ mais rien ne nous assure que $\int_0^{+\infty} |s(t)|$ converge (ce n'est d'ailleurs pas le cas

5. Pour $x > 0$ on a

$$0 \leqslant |f(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|s(t)\mathrm{e}^{-xt}\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}$$

   D'où, par encadrement, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

6. Soit $a > 0$.

   — Pour $x > a$ la fonction $t \mapsto s(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$
   — Pour $t \geqslant 0$ la fonction $x \mapsto s(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est dérivable sur $[a, +\infty[$ de dérivée $x \mapsto \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}$
   — Pour $x \geqslant a$, la fonction $t \mapsto \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$
   — Pour $x \geqslant a$ et $t \geqslant 0$ on a $\left|\sin(t)\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-at}$ et la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$

   Le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale nous assure alors que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, ce pour tout $a > 0$. f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, +\infty[$.

7. Pour $x > 0$ on a $f'(x) = \int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$

   Soit $A > 0$, on a alors

$$\begin{aligned} \int_0^A \sin(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2i}\int_0^A \mathrm{e}^{-xt+it} - \mathrm{e}^{-xt-it}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2i}\int_0^A \mathrm{e}^{(-x+i)t} - \mathrm{e}^{(-x-i)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2i}\left[\frac{\mathrm{e}^{(-x+i)t}}{-x+i} - \frac{\mathrm{e}^{(-x-i)t}}{-x-i}\right]_0^A \\ &= \frac{e-xA}{2i}\left(\frac{\mathrm{e}^{iA}}{-x+i} - \frac{\mathrm{e}^{-iA}}{-x-i}\right) - \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{-x+i} - \frac{1}{-x-i}\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-xA}}{2i}\left(\frac{\mathrm{e}^{iA}}{-x+i} - \frac{\mathrm{e}^{-iA}}{-x-i}\right) + \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

   Or

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-xA}}{2i}\left(\frac{\mathrm{e}^{iA}}{-x+i} - \frac{\mathrm{e}^{-iA}}{-x-i}\right)\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-xA}}{|x|}$$

   D'où $\lim_{A\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xA}}{2i}\left(\frac{\mathrm{e}^{iA}}{-x+i} - \frac{\mathrm{e}^{-iA}}{-x-i}\right) = 0$.

   Ainsi $f'(x) = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2}$.

Il existe donc $K \in \mathbb{R}$ telle que, pour $x > 0$, $f(x) = \arctan(x) + K$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, d'où $K = -\frac{\pi}{2}$.

Finalement
$$\forall x > 0, \qquad f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

8. Puisque f est continue en 0 on a $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$, i.e.
$$I = \lim_{x \to 0} \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Corrigé de l'exercice 13

1. Pour $t \geqslant 0$ et $x > -1$ on pose $g(x,t) = \dfrac{1}{1+x^3+t^3}$. Soit $a \in]-1, 0]$ et $b > 1$
   — Pour $x \in [a,b]$ la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+x^3+t^3}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $\dfrac{1}{1+x^3+t^3} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$. On en déduit donc qu'elle est intégrable sur $[0, +\infty[$
   — Pour $t \geqslant 0$ la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3+t^3}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ de dérivée $\dfrac{\partial g}{\partial x} : (x,t) \mapsto \dfrac{-3x^2}{(1+x^3+t^3)^2}$
   — Pour $x \in [a,b]$ la fonction $t \mapsto \dfrac{-3x^2}{(1+x^3+t^3)^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$
   — Pour $x \in [a,b]$ et $t \geqslant 0$ on a
   $$\frac{-3x^2}{(1+x^3+t^3)^2} \leqslant \frac{3b^2}{(1+a^3+t^3)}$$
   La fonction $t \mapsto \dfrac{3b^2}{(1+a^3+t^3)}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$

   D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $[a,b]$ avec $-1 < a < 1 < b$, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$.

   Pour $x > -1$ on a $f'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-3x^2}{(1+x^3+t^3)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$, f est donc décroissante sur $]-1, +\infty[$.
2. Il s'agit d'une simple décomposition en éléments simples, puisqu'elle est déjà donnée il nous suffit de vérifier le résultat en mettant le terme de droite sous le même dénominateur.

On ne peut pas travailler directement sur $[0,+\infty[$ car l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{3(1+t)}\,\mathrm{d}t$ diverge.

On a alors, pour $A > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^A \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t &= \int_0^A \frac{1}{3(1+t)} + \frac{2-t}{3\,(1-t+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^A \frac{1}{3(1+t)}\,\mathrm{d}t + \int_0^A \frac{2-t}{3\,(1-t+t^2)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\left[\ln(1+t)\right]_0^A - \frac{1}{6}\int_0^A \frac{2t-1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^A \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\ln(1+A) - \frac{1}{6}\left[\ln(1-t+t^2)\right]_0^A + \frac{1}{2}\int_0^A \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\ln(1+A) - \frac{1}{6}\ln(1-A+A^2) + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^A \\
&= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(1+A)^2}{1-A+A^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2A-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(1+A)^2}{1-A+A^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2A-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \\
&\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \\
&\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Ainsi $f(0) = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

3. Pour $x > 0$ on a

$$\frac{1}{1+x^3+t^3} \leqslant \frac{1}{x^3+t^3} \leqslant \frac{1}{x^3}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^3}$$

En posant le changement de variable $s = \dfrac{t}{x}$ on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi x}{3\sqrt{3}}$

Ainsi, on a

$$\forall x > 0, \qquad 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{2\pi}{3\sqrt{3}x^2}$$

Par encadrement on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4. D'après la question 1. on a, pour $x > -1$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{et} \qquad f'(x) = -3x^2\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3+t^3)^2}\,\mathrm{d}t$$

Posons $u(t) = t$ et $v(t) = \dfrac{1}{1+x^3+t^3}$. u et v sont de classe $\rfloor^1$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$.

On a alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) - u(0)v(0) - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{3t^3}{(1+x^3+t^3)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 3\int_0^{+\infty} \frac{(t^3+x^3+1)-(x^3+1)}{(1+x^3+t^3)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 3\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3+t^3} - (x^3+1) frac1(1+x^3+t^3)^2\,\mathrm{d}t \\
&= 3f(x) + \frac{x^3+1}{x^2}f'(x)
\end{aligned}$$

f est donc solution de l'équation $y' + \dfrac{2x^2}{x^3+1}y = 0$

5. La fonction $x \mapsto -\dfrac{2x^2}{x^3+1}$ admet comme primitive la fonction $x \mapsto -\dfrac{2}{3}\ln(1+x^3)$. D'après la question précédente il existe alors $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x > -1, \qquad f(x) = \frac{K}{(1+x^3)^{\frac{2}{3}}}$$

Or $f(0) = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, ainsi

$$\forall x > -1, \qquad f(x) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}(1+x^3)^{\frac{2}{3}}}$$

Corrigé de l'exercice 14

1. La linéarité de T ne pose aucun problème, le point important est de montrer que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$

   Soit $a > 0$, on va montrer par récurrence sur n que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[-a,a]$ et que $T(f)^{(n)} : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^n f^{(n)}(tx)\,\mathrm{d}t$

   <u>Initialisation :</u> f' est continue sur $[-a,a]$ donc bornée. Notons $M_a = \displaystyle\sum_{s\in[-a,a]} |f(s)|$.

   — Pour $x \in [-a,a]$ la fonction $t \mapsto f(tx)$ est continue sur $[0,1]$
   — Pour $t \in [0,1]$ la fonction $x \mapsto f(tx)$ est de continue sur $[-a,a]$
   — Pour $x \in [-a,a]$ et $t \in [0,1]$ on a $|f(tx)| \leqslant M_a$ et la fonction $t \mapsto M_a$ est intégrable sur $[0,1]$

   Ainsi le théorème de continuité sous le signe intégrale nous assure que $T(f)$ est continue sur $[-a,a]$,

   <u>Hérédité :</u>

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[-a,a]$ et que $T(f)^{(n)} : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^n f^{(n)}(tx)\,\mathrm{d}t$.

   $f^{(n+1)}$ est continue sur $[-a,a]$ donc bornée. Notons $K_a = \displaystyle\sum_{s\in[-a,a]} |f^{(n+1)}(s)|$.

   — Pour $x \in [-a,a]$ la fonction $t \mapsto t^n f^{(n)}(tx)$ est intégrable sur $[0,1]$ car continue
   — Pour $t \in [0,1]$ la fonction $x \mapsto t^n f^{(n)}(tx)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]$ de dérivée $x \mapsto t^{n+1} f^{(n+1)}(tx)$
   — Pour $x \in [-a,a]$ la fonction $t \mapsto t^{n+1} f^{(n+1)}(tx)$ est continue sur $[0,1]$
   — Pour $x \in [-a,a]$ et $t \in [0,1]$ on a $|t^{n+1} f^{(n+1)}(tx)| \leqslant K_a$ et la fonction $t \mapsto K_a$ est intégrable sur $[0,1]$

   Ainsi le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale nous assure que $T(f)^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]$. $T(f)$ est donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[-a,a]$ et $T(f)^{(n)} : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^{n+1} f^{(n+1)}(tx)\,\mathrm{d}t$, ce qui achève la récurrence

   $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-a,a]$ ce, pour tout $a > 0$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$ on a $T(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 tf'(tx)\,\mathrm{d}t$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et $f \in \mathcal{C}^\infty$.

   Une intégration par parties nous assure alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad T(f)'(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x}\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t = \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x}T(f)(x)$$

   Supposons que f est un vecteur propre de T pour λ, on a alors $T(f) = \lambda f$, d'où,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lambda f'(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{\lambda}{x}f(x)$$

f est ainsi solution de l'équation différentielle $\lambda y' + \left(\dfrac{\lambda - 1}{\lambda x}\right) y = 0$.

Il existe ainsi $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = K \exp\left(\frac{1-\lambda}{\lambda} \ln(|x|)\right) = K|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

Réciproquement, si $f : x \mapsto K|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t &= K|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \int_0^1 t^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\,\mathrm{d}t \\ &= K|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \left[\lambda t^{\frac{1}{\lambda}}\right]_0^1 \\ &= K f(x)\end{aligned}$$

Finalement $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$ et $E_\lambda(T) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}\right)$

Enfin, le changement de variable $s = tx$ nous assure que, pour $x \neq 0$, $T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s$

Supposons que $f \in \mathrm{Ker}(T)$, alors, pour tout $x \neq 0$ on a $\displaystyle\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s = 0$, d'où en dérivant $f(x) = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})}\}$.
Finalement $\mathrm{Sp}(T) = \mathbb{R}^*$.